1. Curvas en el plano y en el espacio

1.1. Curvas en general

- Una **curva plana** es una aplicación continua $\alpha : I \subset \mathbb{R}^n$ definida por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$.
- La **velocidad** es la derivada $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t))$
- La **rapidez** es la norma de la velocidad $v_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$
  - α es **regular** $\iff v_\alpha(t) > 0, \forall t \in I$
  - La derivada (o velocidad) normalizada es $T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{v_\alpha(t)}$.
- La **longitud** es $l_\alpha = \int_I v_\alpha(t)dt$.
- Una **parametrización** es un difeomorfismo $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$
  - El **signo de una parametrización** es

$$\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} +1 & \text{si } \varphi'(t) > 0, \forall t \in J \\ -1 & \text{si } \varphi'(t) < 0, \forall t \in J \end{cases}$$

  - Una curva está **parametrizada por longitud de arco** o p.p.a $\iff \|\alpha'(t)\| = 1,\ \forall t \in I$.
- Si para dos curvas α, β existe φ difeomorfismo tal que $\alpha = \beta \circ \varphi$ decimos que $\alpha \sim \beta$
  - $\sim$ es una relación de equivalencia
  - Dos curvas en una misma clase de equivalencia comparten la traza o imagen.
  - Se cumple

$$\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t))\varphi'(t)$$
$$\|\alpha'(t)\| =$$

- Una curva es **birregular** $\iff$ para una parametrización α se tiene que α' y α'' son linealmente independientes.
  - En particular, $\alpha', \alpha'' \neq 0$ y por tanto α también es regular.

1.2. Curvas planas

- El **diedro de Frenet-Serret** formado por los vectores

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$
$$\mathbf{n}_\alpha(t) = J\mathbf{t}_\alpha(t) \text{ con } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La **curvatura** (con signo)

$$k_\alpha(t) = \frac{\langle \mathbf{t}_\alpha'(t), \mathbf{n}_\alpha(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}$$
$$k_\alpha(t) = \frac{\det(\alpha'(t),\ \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} \qquad \text{si } \alpha \text{ regular}$$
$$k_\alpha(t) = \|\alpha''(t)\| \qquad \text{si } \alpha \text{ está p.p.a.}$$

  - El **vector curvatura** es $\mathbf{k}_\alpha(t) = k_\alpha(t)\mathbf{n}_\alpha(t)$
  - El **radio de curvatura**

$$\rho_\alpha(t) = \frac{1}{k_\alpha(t)}$$

  - El **centro de curvatura**

$$C_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)}\mathbf{n}_\alpha(t)$$

  - El **circulo osculador** o **circunferencia osculatriz**

$$\{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - C_\alpha(t)\| = \frac{1}{k_\alpha(t)},\ \text{para } t \in I \text{ fijado } \}$$

- Las **ecuaciones de Frenet-Serret** salen de tomar la submatriz 2×2 de las ecuaciones en el espacio.

1.3. Curvas en el espacio

- El triedro de Frenet-Serret formado por los vectores

$$\mathbf{t}_\alpha(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$
$$\mathbf{n}_\alpha(s) = \frac{\mathbf{t}_\alpha'(s)}{\|\mathbf{t}_\alpha'(s)\|}$$
$$\mathbf{b}_\alpha(s) = \mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s)$$

- Los 3 planos del triedro de Frenet-Serret para un punto $\alpha(s)$ de la curva [afines] son:
  - El **plano osculador** $\text{span}\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos P cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s) \rangle = 0$
  - El **plano normal** $\text{span}\{\mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos P cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{t}_\alpha(s) \rangle = 0$
  - El **plano rectificante** $\text{span}\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = 0$
- La **curvatura** (siempre ≥ 0)

$$k_\alpha(s) = \frac{\|\mathbf{t}_\alpha'(s)\|}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$k_\alpha(s) = \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}{\|\alpha''(s)\|^3} \qquad \text{si } \alpha \text{ regular}$$
$$k_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| \qquad \text{si } \alpha \text{ p.p.a}$$

- El **vector curvatura**

$$\mathbf{k}_\alpha(s) = \frac{\mathbf{t}_\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \text{ colineal con } \mathbf{n}_\alpha(s)$$

- La **torsión**

$$\tau_\alpha(s) = -\frac{\langle \mathbf{b}_\alpha'(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle}{\|\alpha'(s)\|}$$
$$\tau_\alpha(s) = \frac{\det(\alpha'(s),\ \alpha''(s),\ \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2} \text{ si } \alpha \text{ regular}$$

- Las ecuaciones de Frenet-Serret

$$\mathbf{t}_\alpha' = v_\alpha k_\alpha \mathbf{n}_\alpha$$
$$\mathbf{n}_\alpha' = -v_\alpha k_\alpha \mathbf{t}_\alpha + v_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha$$
$$\mathbf{b}_\alpha' = -v_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}_\alpha' \\ \mathbf{n}_\alpha' \\ \mathbf{b}_\alpha' \end{pmatrix} = \|\alpha'(s)\| \begin{pmatrix} 0 & k_\alpha & 0 \\ -k_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\alpha \\ \mathbf{n}_\alpha \\ \mathbf{b}_\alpha \end{pmatrix}$$

2. Superficies

- Un **homeomorfismo** entre dos espacios topológicos es una aplicación biyectiva continua y con inversa continua.
  - Un **difeomorfismo** es un **homeomorfismo** diferenciable con inversa diferenciable.
  - Dos conjuntos son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos.

- Una **superficie regular** S es un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in S$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ y una **parametrización** $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

  1. $\mathbf{x}$ es diferenciable como aplicación $x : U \to \mathbb{R}^3$
  2. $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo
  3. $\forall (u,v) \in U, (d\mathbf{x})_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\iff$ los vectores coordenaods son linealmente independientes $\forall (u,v) \in U$.

  - Puede ocurrir (esfera, cono…) que no valga con una única parametrización $\forall p \in S$. Si nos vale con una única parametrización entonces S es homeomorfa a un abierto de R^2.

- Los **vectores coordenados** en un punto $\mathbf{x}(u,v) \in S$ son

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u,v) = (d\mathbf{x})_{(u,v)} \cdot e_1 \mathbf{x}_v(u,v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u,v) = (d\mathbf{x})_{(u,v)} \cdot e_2$$

  - Los **campos coordenados** asociados a la parametrización $\mathbf{x}$ son dos campos $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ diferenciables en el abierto $V \subset S$.

- El **plano tangente** a S en $p \in S$ es un subvespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ con dimensión 2 dado por:

$$\begin{aligned} T_pS = \{\alpha'(0) \mid \exists \varepsilon > 0, \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \\ \wedge\ \alpha(0) = p \\ \wedge\ \alpha \text{ diferenciable } \} \end{aligned}$$

  - Si q es la preimagen de p por $\mathbf{x}$ (es decir, $\mathbf{x}(q) = p$) entonces $T_pS = (d\mathbf{x})_q(\mathbb{R}^2)$
  - El **plano tangente (afín)** a S en $p = \mathbf{x}(u,v) \in S$

$$T_pS = p + \underbrace{\text{span}\{\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)\}}_{\text{plano tangente vectorial}}$$

- La **recta normal** a S en $p \in S$ es el complemento ortogonal del plano tangente $T_pS^{\perp}$.
  - Para cada $p \in S$ existen dos vectores normales unitarios (opuestos) en la recta normal.

- Una **función definida en la superficie regular** S es $f : S \to \mathbb{R}^m$.
  - f es **diferenciable** si para toda parametrización $\mathbf{x}$ de S, la función $f \circ \mathbf{x} : U \subset R^2 \to R^m$ es diferenciable. Se cumplen las propiedades habituales sobre diferenciabilidad: suma producto y cociente (siempre que tenga sentido) de funciones diferenciables es diferenciable.
  - Si f es una función definida entre dos superficies ($f : S_1 \to S_2$) entonces f es **diferenciable** $\iff$ $\forall p \in S_1$ hay una parametrización $\mathbf{x}_1 : U_1 \to S_1$ con $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ y una parametrización $\mathbf{x}_2 : U_2 \to S_2$ con $f(p) \in \mathbf{x}_2(U_2)$ tales que $\overline{f} := \mathbf{x}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}_1$ es diferenciable. $\overline{f}$ es la expresión en coordenadas de f.
  - La **diferencial de una función definida en una superficie regular** es

$$(df)_p : T_pS \to \mathbb{R}, \qquad (df)_p(x) := (f \circ \alpha)'(0)$$

    donde $\alpha : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to S$ es una curva diferenciable en S tal que $\alpha(0) = p \wedge \alpha'(0) = x$. $(df)_p$ está bien definida y es independiente de la elección de α.
  - Más comodamente, si $\mathbf{x}$ es una parametrización de S tal que para ciertos u_0, v_0 se tiene que $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$, entonces la matrix asociada a la diferencial en la base $\{\mathbf{x}_u(u_0,v_0), \mathbf{x}_v(u_0,v_0)$ es

$$(df)_p = \begin{pmatrix} (f \circ \mathbf{x})_u(u_0,v_0) \\ (f \circ \mathbf{x})_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

    - f constante $\implies$ $(df)_p = 0$, $\forall p \in S$. Recíprocamente, $(df)_p = 0 \forall p \in S \wedge S$ conexa $\implies$ f constante.
    - f tiene un extremo relativo en p $\implies$ $(df)_p = 0$.

- La **primera forma fundamental** de S en p es

$$\mathrm{I}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{I}_p(x,y) := \langle x, y \rangle$$

  - Es bilineal, simétrica y definida positiva (es el producto escalar restringido a cada plano tangente de S en p).
  - Dada una parametrización $\mathbf{x}$ de S tal que $\mathbf{x}(u_0,v_0) = p \in S$ la matriz de I_p respecto de la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_u(u_0,v_0), \mathbf{x}_v(u_0,v_0)\}$ es

$$(I_p)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \end{pmatrix}$$

    donde cada derivada parcial de $\mathbf{x}$ está evaluada en (u_0, v_0).
  - Al escribir

$$\mathrm{I}_p(x,y) = \langle x, y \rangle = (x_1, x_2)(I_p)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

    estamos obteniendo el producto escalar de dos vectores en T_pS en función de sus coordenadas (x_1, x_2) e (y_1, y_2) respecto de la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.
  - La **forma diferencial de la primera forma fundamental** es

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Fdv^2$$

    donde E, F y G son funciones diferenciables que evaluamos para cada $p \in S$.
    - Del criterio de Sylvester para que I_p siempre sea definida positiva se tiene que $E, G > 0$ y que $EG - F^2 > 0$.
  - La **longitud de un segmento** de una curva diferenciable $\alpha : I \to S$, $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ es

$$L(\alpha|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{\mathrm{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}dt = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu$$

  - El **área de una región** $R \subset S$ contenida en $\mathbf{x}(U)$ (bien parametrizada) es:

$$A(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable entre superficies regulares.

- f es una **aplicación conforme** si existe una aplicación diferenciable positiva $\lambda : S_1 \to R$ tal que

$$\langle (df)_p(x), (df)_p(y) \rangle = \lambda(p)\langle x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in T_pS_1,\ \forall p \in S_1$$

  - Una **parametrización** $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2$ se dice **conforme** si cumple la definición anterior para $S_2 = \mathbb{R}^2$. Es decir, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\forall p \in U$. Equivalentemente, $\mathbf{x}$ se dice conforme si

$$\mathrm{I}_p^{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \lambda(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    es decir, si $E = G$ y $F = 0$ para todo $p = (u, v) \in U$.
  - f es conforme $\iff$ **preserva ángulos**
  - f es **equiárea** $\iff$ preserva $\det \mathrm{I}_p = EG - F^2$ entre S_1 y S_2

- f es una isometría local $\iff$ preserva la primera forma fundamenteal, es decir,

$$\langle (df)_p(x), (df)_p(y) \rangle = \langle x, y\rangle$$

  - f es una isometría local $\iff$ f es conforme con $\lambda(p) = 1$ constantemente
  - Toda isometría local de superficies es un difeomorfismo local
  - f isometría local $\iff$ f preserva longitudes, ángulos y áreas
    - Es decir f conforme y f equiárea $\iff$ f isometría local
  - Dos superficies son **localmente isométricas** si existe una isometría local f entre ellas y además f es sobre entre S_1 y S_2. *No es suficiente que f sea una isometría local.*

- Una **isometría global** entre superficies es un difeomorfismo global que además es isometría local.

  - Dos superficies son **globalmente isométricas** si existe una isometría global entre ellas.
  - isometría global $\implies$ isometría local

- La **aplicación de Gauss** $N : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{S}^2$ definida por

$$(N \circ \mathbf{x})(u, v) = N(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

  asocia a cada punto $p = \mathbf{x}(u, v) \in S$ su vector normal unitario. En ocasiones abusaremos de la notación para denotar N como aplicación de U a $\mathbb{S}^2$ escibiendo $N(u, v) = (N \circ \mathbf{x})(u, v)$.

  - N define un **campo normal unitario** localmente para cada entorno $\mathbf{x}(U)$ de p.
  - Si N define un campo normal globalmente para todo $p \in S$ se dice que S es orientable. Esto depende de la parametrización, por tanto S es **orientable** si existe alguna parametrización para la que N defina un campo normal unitario en toda S. Son orientables el plano, la esfera, los conjuntos de nivel y los grafos de funciones, entre otros.
  - A partir de N definimos un endomorfismo $J : T_pS \to T_pS$ dado por

$$Jx := N(p) \times x$$

    que rota el vector $x \in T_pS$ 90º en el sentido que hace que $\{x, Jx, N(p)\}$ sea una base ortogonal positivamente orientada.

    Si tomamos $x = \mathbf{t}_\alpha(s)$ para una curva regular $\alpha \subset S$ entonces la base que forman $\{\mathbf{t}_\alpha(s), J\mathbf{t}_\alpha(s), (N \circ \alpha)(s)\}$ se conoce como **triedro de Darboux**.

- La **segunda forma fundamental** es la aplicación

$$\mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{II}_p(x, y) := \langle x, W_p y\rangle$$

  - II_p es bilineal y simétrica (en cualquier base, no solo en bases ortonormales) pero no tiene por qué ser definida positiva
  - La expresión matricial de II_p respecto de la base de vectores coordenados $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ se puede calcular a partir de la aplicación de Gauss mediante

$$\mathrm{II}_p \equiv \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_{uu}, N\rangle & \langle \mathbf{x}_{uv}, N\rangle \\ \langle \mathbf{x}_{vu}, N\rangle & \langle \mathbf{x}_{vv}, N\rangle \end{pmatrix}$$

  - Un punto $p \in S$ es **umbilical** si $\mathrm{II}_p = \lambda(p)\mathrm{I}_p$

- Una **dirección asintótica** de S en p es un vector $x \in T_pS$ no nulo tal que $\mathrm{II}_p(x, x) = 0$.

  - Una **línea asintótica** de S es una curva diferenciable $\alpha : I \to S$ tal que $\alpha'(t)$ es dirección asintótica $\forall t \in I \iff \mathrm{II}(\alpha', \alpha') = 0$.

- El **endomorfismo de Weingarten** se define para cada $p \in T_pS$ como la aplicación

$$W : T_pS \to T_pS \text{ con } Wp(x) := -(dN)_p x$$

  - Es una aplicación autoadjunta: $\langle W_p x, y\rangle = \langle x, W_p y\rangle$
  - Su expresión matricial[1] respecto de cualquier base ortonormal de T_pS es simétrica y por tanto diagonalizable. Además, las curvaturas que aparecen a continuación definidas en función de los autovalores de W_p están bien definidas y permanecen invariantes por cambios de base.
  - La relación matricial respecto de $\mathcal{B}$ entre $\mathrm{I}_p, \mathrm{II}_p$ y W es

$$(\mathrm{II}_p)_{\mathcal{B}} = (\mathrm{I}_p)_{\mathcal{B}}(W_p)_{\mathcal{B}}$$

  - Un punto $p \in S$ es **umbilical** si $W_p = \lambda(p)Id$

- Las **curvaturas principales** de S en p son los autovalores $\kappa_1(p), \kappa_2(p) \in \mathbb{R}$ de W_p.

  - Las **direcciones principales** son cualquier autovector de W_p. Si $\kappa_1 \neq \kappa_2$ las direcciones principales son los múltiplos no nulos de e_1 y e_2. Si $\kappa_1 = \kappa_2$ todo vector no nulo de T_pS es dirección principal.

[1] Si calculamos W_p mediante la diferencial del normal, debemos recordar que para obtener la forma matricial del endomorfismo necesitamos fijar una base. Por tanto, para llegar a la misma matriz que la que sale de las formas fundamentales mediante la fórmula que se expone a continuación, necesitamos expresar dN respecto de la base de vectores coordenados.

        - Una **línea de curvatura** es una curva diferenciable $\alpha : I \to S$ tal que $\alpha'(t)$ es dirección principal de S para todo $t \in I \iff W_{\alpha(t)}\alpha'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),\ \forall t \in I$ y cierta función curvatura principal $\lambda : I \to \mathbb{R}$.
          Si el polinomio característico es complicado se puede utilizar que

$$Wv = \lambda v \iff \mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}v = \lambda v \iff \mathrm{II}v = \lambda \mathrm{I}v$$

          . A partir de aquí, si necesitamos el λ calculamos; si no, definimos $z = \mathrm{II}v$ y forzamos que sea linealmente dependiente de v, es decir, que $\det(\mathrm{II}v, \mathrm{I}v) = 0$.

    - Un **punto umbilical** es un $p \in S$ tal que $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$
    - Las **funciones de curvatura principal** se obtienen de diagonalizar para diagonalizamos para p genérico. Obtendremos funciones continuas $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$. Si $\kappa_1 \neq \kappa_2$ entonces además son funciones diferenciables.

- La **curvatura de Gauss** de S en p es el número real

$$K(p) := \det W_p = \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p)$$

  o, alternativamente

$$K(p) = \det(\mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}) = \frac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

  para e, f, g, E, F, G evaluadas en p.

    - El **Teorema Egregium de Gauss** dice que la curvatura gaussiana es invariante por isometrías locales. Es decir, que si $f : S_1 \to S_2$ es una isometría local, entonces $K_1(p) = K_2(f(p))$.
      Una consecuencia de que la curvatura gaussiana es una propiedad intrínseca es que la podemos obtener a partir de la primera forma fundamental[2]. En particular, si la parametrización $\mathbf{x}$ es ortogonal, se tiene que:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right], \qquad \text{si } F = 0$$

    - Atendiendo a la curvatura gaussiana, los puntos $p \in S$ se clasifican en:
        1. **puntos elípticos** si $K(p) > 0$
        2. **puntos hiperbólicos** si $K(p) < 0$
        3. **puntos parabólicos** si $K(p) = 0 \land W_p \neq 0$ (e.d. si solo una de las dos curvaturas principales es 0)
        4. **puntos planos** si $K(p) = 0 \land W_p = 0$ (e.d. si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$

- La **curvatura media** de S en p es el número real

$$H(p) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}W_p = \frac{1}{2}(\kappa_1(p) + \kappa_2(p))$$

  o, alternativamente

$$H(p) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}) = \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$$

  para e, f, g, E, F, G evaluadas en p.

    - Una **superficie minimal** es aquella que tiene $H(p) = 0,\ \forall p \in S$. Son minimales los trozos de esfera y los trozos de plano.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular contenida en S (es decir, $\alpha(I) \subset S$)

- [3] La **curvatura geodésica** es

$$k_{g,\alpha}(s) = \langle \mathbf{t}'_\alpha(s), (N \circ \alpha) \times \mathbf{t}_\alpha(s)) \rangle = k_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, (N \circ \alpha) \times \mathbf{t}_\alpha \rangle$$

- La **curvatura normal** es

$$k_{n,\alpha} = \langle \mathbf{t}'_\alpha(s), (N \circ \alpha)(s)) \rangle = k_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, N \circ \alpha \rangle$$

  además, en relación con la segunda forma fundamental tenemos

$$k_{n,\alpha} = \mathrm{II}(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha)$$

    - Cualesquiera dos curvas regulares que pasen por un mismo punto $p \in S$ con vectores velocidad colineales tienen la misma curvatura normal por lo que definimos la **curvatura normal de S en p en la dirección de un vector unitario x dado** por

$$k_n(p, x) := \mathrm{II}_p(x, x)$$

    - Si para una dirección $x \in T_pS$ tenemos que $k_n(p, x) = 0$ entonces x es una dirección asintótica.
    - Si $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de T_pS de dorecciones principales de manera que W_p es diagonal con coeficientes $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ y x_θ es una dirección en T_pS enotnces

$$k_n(p, x_\theta) = \kappa_1(p)\cos^2\theta + \kappa_2(p)\sin^2\theta$$

      donde $\cos\theta = \langle e_1, x_\theta \rangle$.

- Curvaturas normal, geodésica y la curvatura escalar de α cumplen $k_\alpha^2 = k_{g,\alpha}^2 + k_{n,\alpha}^2$
- Una **geodésica** es una curva $\alpha \subset S$ cuya componente tangencial de la aceleración es nula en todo punto de la curva:

$$k_{g,\alpha}(s) = 0,\ \forall s \in I$$

    - Las isometrías[4] locales preservan las geodésicas: si α_1 es una geodésica en S_1 y S_2 es localmente isométrica a

[2] Ver la fórmula de Brioschi en `https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_curvature#Alternative_formulas`

[3] Las curvaturas geodésica y normal son las componentes del vector normal $\mathbf{n}_\alpha$ de una curva $\alpha \subset S$ regular. Recordemos que dado un punto de la curva que también está en la superficie podemos construir el triedro de Darboux tomando como vector de referencia $\mathbf{t}_\alpha(s)$. En este caso, se genera el la base ortogonal $\{\mathbf{t}_\alpha(s), J\mathbf{t}_\alpha(s), (N \circ \alpha)(s)\}$. Como $\mathbf{n}_\alpha(s) \perp \mathbf{t}_\alpha(s)$ si expresamos $\mathbf{n}_\alpha(s)$ respecto del triedro de Darboux solo tendrá coordenadas en $J\mathbf{t}_\alpha(s)$ y $(N \circ \alpha)(s)$. Definimos las curvaturas geodésica y media como este par de coordenadas respecto del triedro de Darboux (sabiendo que la coordenada que acompaña a $\mathbf{t}_\alpha(s)$ siempre será 0).

[4] Ojo: en ocasiones hay que trabajar un poco para obtener la parametrización. Por ejemplo, la isometría entre plano y cono no es la identidad como ocurre en el cilindro. La forma más sencilla de obtenerla es parametrizar el plano en coordenadas polares y el cono como superficie de revolución, pero además tomando una parametrización por longitud de arco de la recta $(r(u), z(u))$ que giramos al rededor del eje z para parametrizar el cono. Esto nos da casi una isometría salvo por el G de la I_ϕ. Lo corregimos multiplicando v por la norma de la recta (r, z). Es decir, parametrizar el plano por $\mathbf{x}(r, \theta)$ y el cono por $\phi(u, v)$ donde

$$\mathbf{x}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)\phi(u, v) = \frac{\rho u}{\sqrt{\rho^2 + 1}}\left(\cos(v\sqrt{\rho^2 + 1}), \sin(v\sqrt{\rho^2 + 1}), 1\right)$$

En cualquier caso, aunque lo de las isometrías está bien, no debemos olvidar el Teorema de Clairaut mencionado más arriba. En este caso, parametrizando el cono sin las restricciones adicionales, es decir, tomando $\psi(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$ como parametrización, tenemos que I_ψ solo depende de u y por tanto podemos aplicar el teorema.

S_1 por h, entonces la curva $\alpha_2 = h \circ \alpha_1 \subset S_2$ también es una geodésica. En el plano las geodésicas son las rectas.

- Si α une dos puntos de S y tiene longitud mínima, entonces α es una geodésica. Dados dos puntos, la curva que los une de menor longitud es una geodésica y es única. [5]

- El **Teorema de Clairaut**[6] dice que si la primera forma fundamental de una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ solo depende de u, entonces $\alpha \subset S$ es una geodésica $\iff \langle \alpha', \mathbf{x}_v \rangle = a$ con a constante.

  Como $\alpha' \in T_pS$ podemos escribir $\alpha' = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v$ y por tanto $\langle \alpha', \mathbf{x}_v \rangle = \langle u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = u'F + v'G$ utilizando que I es bilineal.

[5] Sin embargo, si α es una geodésica que pasa por dos puntos, no tiene por qué ser la curva de menor longitud que los une, puede haber varias geodésicas que lo hagan. Lo importante es que solo una curva será de longitud mínima y dicha curva será una geodésica.

[6] No confundir con el Teorema de Clairaut-Schwarz sobre la simetría de las derivadas cruzadas.