

# 1. Preliminares

## 1.1. Normas

Sea  $V$  un espacio vectorial,  $x, y, z \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

- Un **producto escalar** es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple:

$$\begin{aligned}\langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle & \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle & \langle x, x \rangle &\geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}_V\end{aligned}$$

- Una **norma** es una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple:

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0, \|x\| = 0 \iff x = \vec{0}_V \\ \|\lambda v\| &= |\lambda| \|v\| & \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

- $\|\cdot\|$  cumple la **identidad del paralelogramo**

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

si y solo si procede producto escalar dado por la **identidad de polarización**

$$4\langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

Se dice que esta es una **norma euclídea**.

- Un espacio normado es un par  $(V, \|\cdot\|_V)$
- Una **p-norma** es una norma  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida con

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left[ \sum_{j=1}^n x_j^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

- El **exponente conjugado** de  $p$  es  $p'$  y cumple  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Es único y si  $p = 1$  entonces  $p' = \infty$  y viceversa
- La norma euclídea que procede del producto escalar estándar es la p-norma de orden 2. 2 es el único número que tiene como conjugado a sí mismo
- Las p-normas cumplen las desigualdades de **Young, Hölder y Minkowski**:

$$\begin{aligned}a, b > 0 &\implies ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \\ x, y \in \mathbb{R}^n &\implies \langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_{p'} \\ x, y \in \mathbb{R}^n &\implies \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p\end{aligned}$$

- Dos **normas** son **equivalentes** si definen los mismos abiertos

- en  $V = \mathbb{R}^n$  todas las normas son equivalentes

- Una norma  $\|\cdot\|$  es **submultiplicativa**  $\iff \forall x, y, \|xy\| \leq \|x\| \|y\|$

- $\|\cdot\|$  submultiplicativa  $\implies \|x^n\| \leq \|x\|^n$

- La **norma de Frobenius** para matrices es  $\|\cdot\|_F = \sqrt{\text{traza } A^*A}$  donde  $A^*$  es la traspuesta conjugada de  $A$

- La norma de Frobenius es submultiplicativa

## 1.2. Espacios métricos

Sea  $X \neq \emptyset$  conjunto y sean  $x, y, z \in X$

- Un espacio métrico es un par  $(X, d)$  donde la función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es una distancia que cumple:

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y \\ d(x, y) &= d(y, x) & d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z)\end{aligned}$$

- Si  $E \subset X, E \neq \emptyset$  entonces la restricción  $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  define una distancia

- Si  $E \subset \mathbb{R}^n = X$  no vacío, no necesariamente subespacio, entonces  $\|x - y\|_E$  define una distancia en  $E$

## 1.3. Sucesiones

- Una **sucesión**  $\{x_n\} \subset X$  es **de Cauchy**  $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$  tal que  $n, m \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$

- $(X, d)$  **completo**  $\iff \{x_n\}$  de Cauchy  $\implies \{x_n\}$  convergente

- Una **sucesión**  $\{x_n\} \subset X$  es **convergente** a  $L \in X$   $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$  tal que  $n \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, L) < \varepsilon$

- $\{x_n\}$  convergente  $\implies \{x_n\}$  de Cauchy
- Si el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$  existe entonces es único

## 1.4. Aplicaciones lineales. Normas equivalentes.

- Una **aplicación lineal** es **acotada**  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  si cumple alguna de

- $L$  es continua en  $\vec{0}_E$
- $L$  es continua  $\forall x \in E$
- $\forall x \in E, \exists M \mid \|x\|_E \leq 1 \implies \|L(x)\|_F \leq M$

- $\|\cdot\|_A$  domina a  $\|\cdot\|_B$   $\iff \exists 0 < c < \infty$  tal que  $\forall x \in E, \|x\|_B \leq c \|x\|_A$

- $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$  son equivalentes  $\iff \exists 0 < c, C < \infty$  tales que  $\forall x \in E, c \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C \|x\|_A$ . Entonces,

- Definen los mismos abiertos y cerrados.
- En  $\mathbb{R}^n$  todas las normas son equivalentes.

## 1.5. Topología

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $E \subset Y \subset X, a, x, y \in X, r \in \mathbb{R}$

- La **bola abierta** de radio  $r$  y centro  $a$  es el conjunto  $B_r(a) = B(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$

- La **bola cerrada** de radio  $r$  y centro  $a$  es el conjunto  $\overline{B}_r(a) = \overline{B}(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$

- $E$  es **abierto**  $\iff \forall e \in E, \exists r > 0 \mid B_r(e) \subset E$

- La unión arbitraria de abiertos es un abierto
- La intersección finita de abiertos es un abierto
- Dado  $x \in X$ , un **entorno abierto** de  $x$  es cualquier abierto  $U \mid x \in U$ .
- $U$  es abierto  $\iff U = \bigcup B_r(x)$

- $E$  es **cerrado** si  $E^c = X \setminus E$  es un abierto
  - La intersección arbitraria de cerrados es un cerrado
  - La unión finita de cerrados es un cerrado
- $E$  **abierto relativo** de  $Y \iff \exists E' \mid E = Y \cap E'$  y  $E'$  es abierto en  $X$  (análogo para cerrados)
  - $E$  abierto relativo en  $Y \implies E$  abierto en  $(Y, d_Y)$
- El **interior**  $\text{int } E = \{x \in X \mid \exists r > 0, B_r(x) \subset E\}$
- El **exterior**  $\text{ext } E = \{x \in X \mid \exists r > 0, B_r(x) \cap E = \emptyset\}$
- El **cierre, clausura o adherencia**  $\bar{E} = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset\} = \{L \in X \mid \{a_n\} \subset E \text{ converge a } L\}$ 
  - $E$  cerrado  $\iff E = \bar{E}$
  - $E$  **denso**  $\iff \bar{E} = X$ . Tanto  $\mathbb{Q}$  como  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  son densos en  $\mathbb{R}$
- La **frontera**  $\partial E = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap E^c \neq \emptyset\} = \{x \in X \mid x \notin \text{int } E \wedge x \notin \text{ext } E\}$
- Los **puntos de acumulación**  $E' = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$ 
  - $\bar{E} = E \cup E'$
- Un **punto**  $x \in E$  es **aislado**  $\iff \exists r > 0 \mid B_r(x) \cap E = \{x\}$ 
  - si  $\forall x, x \in E \implies x$  aislado entonces  $E$  es **discreto** y  $\{x\}$  abierto relativo de  $E$
- $(X, d)$  de **Banach**  $\iff X$  es e.v.,  $d$  es una norma y  $X$  completo
- $E$  es **compacto** en  $(X, d) \iff$ 
  - $\{x_n\} \subset E \implies \exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$  subsucesión convergente con límite en  $K$
  - Todo recubrimiento  $\{U_i\}$  por abiertos de  $K$  tiene una subfamilia finita que también recubre a  $K$
- Propiedades de compactos
  - $E$  compacto  $\implies K$  es cerrado y acotado
  - en  $(X, d)$ ,  $X$  compacto  $\implies (X, d)$  completo
  - $E \subset X$  compacto,  $f$  continua en  $E \implies f$  alcanza máximo y mínimo en  $E$
- Un **camino** es una aplicación continua  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$  con  $I$  un intervalo
- Un **homeomorfismo** es una aplicación continua y biyectiva con inversa continua
- $E$  es **conexo** (por abiertos)  $\iff \nexists A, B \subset X \mid A \cap B = \emptyset \wedge (E \cap A) \cup (B \cap E) = E$
- $E$  es **conexo** (por abiertos relativos)  $\iff \forall A, B$  abiertos en  $E$  con  $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = E \implies (A = \emptyset \wedge B = E) \vee (B = \emptyset \wedge A = E)$ 
  - Equivalentemente,  $E$  conexo  $\iff \nexists A, B$  abiertos en  $E$  con  $A \cap B = \emptyset \wedge E = A \cup B$
  - $E$  conexo y  $p \in \bar{E} \implies E \cup p$  conexo
  - $E_1, E_2$  conexos y  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \implies E_1 \cap E_2$  conexo

- $E$  es **conexo por caminos**  $\iff \forall p, q \in E, \exists \alpha(t) : [0, 1] \rightarrow E$  un camino tal que  $\alpha(0) = p \wedge \alpha(1) = q$ 
  - $E$  es **arco-conexo** si además  $f : [0, 1] \rightarrow f([0, 1])$  es un homeomorfismo

$$\begin{aligned} & E \text{ arco-conexo} \\ & \implies E \text{ conexo por caminos} \\ & \implies E \text{ conexo} \end{aligned}$$

- Dado  $x \in E$ , la **componente conexa** que contiene a  $x$  es el conjunto  $\{y \in E \mid \exists A \text{ conexo, con } x \in A \wedge y \in A\}$ 
  - La relación de equivalencia  $x \sim y \iff \exists C$  conexo con  $x, y \in C$  define una partición cuyas clases de equivalencia son las componentes conexas de cada punto.
  - Si  $A \subset X$  conexo,  $A$  está contenido en una única componente conexa.
- $E$  es **convexo**  $\iff \forall x, y \in E \implies [x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\} \subset E$ 
  - Más en general  $x \in \mathbb{R}^n$  es **combinación convexa** de  $v_1, \dots, v_n \iff \exists t_1, \dots, t_n \geq 0 \mid x = \sum_{i=1}^n t_i v_i$  con  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$

## 1.6. Continuidad

Sean  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  espacios métricos,  $f : X \rightarrow Y$  una función

- $f$  es **continua** en  $a \in X \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ . Equivalentemente,  $f$  continua en  $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .
- $f$  **continua** en  $X \iff$ 
  - $f$  continua en  $x, \forall x \in X$
  - $\forall V \subseteq Y, V$  abierto de  $Y \implies f^{-1}(V)$  abierto de  $X$
  - $\forall V \subseteq Y, V$  cerrado de  $Y \implies f^{-1}(V)$  cerrado de  $X$
  - $\forall \{x_n\} \subset X, \{x_n\} \rightarrow x_0 \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$
- $f$  **uniformemente continua**  $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $d_X(x, x') \leq \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$ 
  - Si  $(X, d)$  es compacto entonces  $f$  continua en  $X \implies f$  uniformemente continua
  - Si  $f$  es uniformemente continua entonces se pueden intercambiar límite y derivada
- Si  $f$  es composición de funciones continuas entonces es continuas. Las fórmulas elementales son continuas.

## 2. Diferenciabilidad

Sean  $E, F$  espacios normados,  $x_0 \in E, U \subset E$  entorno abierto de  $x_0$ .  $f : U \rightarrow F$  es **diferenciable** en  $x_0 \iff \exists T \in \mathcal{L}(E, F)$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}_E} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{\|h\|} = \vec{0}_F$$

- Alternativamente,  $f$  es diferenciable en  $x_0 \iff$  podemos escribir
 
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Th + o(\|h\|)$$
- $T$  existe  $\implies T$  única y la llamamos **diferencial** de  $f$  en  $x_0$  y se denota  $(df)_{x_0}$

- $f$  diferenciable en  $x_0 \implies f$  continua en  $x_0$
- toda  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  es diferenciable en todo punto y coincide con sus diferenciales
- $f$  constante  $\implies f$  es diferenciable en todo punto y su diferencial  $(df)_{x_0}$  es nula
- La **linealidad**:  $(f + g)_{x_0} = (df)_{x_0} + (dg)_{x_0}$
- La **regla del producto**:  $(d(f \cdot g))_{x_0} = (df)_{x_0}g(x_0) + f(x_0)(dg)_{x_0}$
- La **regla de la cadena**:  $(d(g \circ f))_{x_0} = (dg)_{f(x_0)}(df)_{x_0}$
- La **derivada respecto de un vector**  $v \in E$  en el punto  $x_0 \in E$  es  $D_v f(x_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + tv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ 
  - Si  $\|v\| = 1$  entonces la derivada se llama direccional
  - Si  $v = e_j \in \{e_1, \dots, e_n\}$  la base estándar de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $D_{e_j} f(x_0) = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{x_0} f = D_j f(x_0)$  es la  $j$ -ésima **derivada parcial**
- La composición de funciones diferenciables es diferenciable. Ojo con aplicar las reglas de derivación a cosas que no son números reales (p.e. en matrices no funcionan).
- **Condiciones de diferenciabilidad** de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $x_0$ :

1. Las derivadas parciales  $\partial_{x_j} f(x_0)$  existen
2. El único candidato posible a diferencial  $(df)_{x_0}$  es la aplicación lineal dada por la **matriz jacobiana** de  $m \times n$

$$Df_{x_0} := \left( \partial_{x_1} f(x_0) \mid \dots \mid \partial_{x_n} f(x_0) \right)$$

$$Df_{x_0} := \begin{pmatrix} Df_1(x_0) \\ \vdots \\ Df_m(x_0) \end{pmatrix}$$

$$Df_{x_0} := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

3.  $Df_{x_0}$  cumple la definición de diferenciabilidad

- El **gradiente**  $\nabla f$  es el jacobiano de una función escalar ( $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ). Es un vector fila.
- El **Jacobiano** es  $\det(Df)$
- Una función vectorial es diferenciable  $\iff$  son diferenciables todas sus funciones componentes

## 2.1. Extremos relativos

En funciones escalares  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

- $f$  tiene un **máximo relativo** en  $x_0 \iff \exists U$  entorno de  $x_0$  tal que  $\forall x \in U \implies f(x) \leq f(x_0)$
- $f$  tiene un **máximo relativo estricto** en  $x_0 \iff \exists U$  entorno de  $x_0$  tal que  $\forall x \in U \implies f(x) < f(x_0)$
- Análogamente se definen los mínimos

- el **Hessiano** es la matriz simétrica de las derivadas segundas

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- $f \in C^2 \implies \frac{\partial f^2}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}$
- Si  $Df(x_0) = 0$ ,  $f$  tiene un punto crítico en  $x_0$ . Además,
  - Hess  $f(x_0)$  definida positiva  $\implies f$  tiene un **mínimo relativo estricto** en  $x_0$
  - Hess  $f(x_0)$  definida negativa  $\implies f$  tiene un **máximo relativo estricto** en  $x_0$
  - $f$  tiene un **mínimo relativo** en  $x_0 \implies$  Hess  $f(x_0)$  es semidefinida positiva
  - $f$  tiene un **máximo relativo** en  $x_0 \implies$  Hess  $f(x_0)$  es semidefinida negativa

- El **Laplaciano**  $\Delta f = \text{traza}(\text{Hess } f)$

- $f$  es armónica en  $E \iff \forall x \in E, \Delta f(x) = 0$

- El **criterio de Sylvester** para una matriz cuadrada  $A$  dice

- menores principales  $> 0 \iff A$  es **definida positiva**
- menores principales  $\geq 0 \iff A$  es **semidefinida positiva**
- menores impares  $\leq 0$  y menores pares  $\geq 0 \iff A$  es **semidefinida negativa**
- menores impares  $< 0$  y menores pares  $> 0 \iff A$  **definida negativa**
- en otro caso  $A$  es indefinida (no implica que no haya extremo relativo)

## 2.2. Polinomio de Taylor

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$ . El polinomio de Taylor de grado 2 en  $x_0$  es

$$p_{x_0}(x) = f(x_0) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - x_0)$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + o(\|x\|^2)$$

## 2.3. Tipos de aplicaciones

Sean  $E, F$  e.v, sea  $f : E \rightarrow F$

- Si  $F = \mathbb{R}$  decimos que  $f$  es **convexa**  $\iff \forall x, y \in E, t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ 
  - En general, si  $x$  es combinación convexa de  $v_1, \dots, v_n$  y  $f$  es convexa entonces  $f(\sum_{i=0}^n t_i v_i) \leq \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$
  - $\forall x \in A, \text{Hess } f(x)$  es semidefinida positiva  $\iff f$  es convexa en  $A$
- Sean  $x_1, \dots, x_n$ . Un punto  $x$  es **combinación convexa** de  $x_1, \dots, x_n \iff x = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$  con  $\sum t_i = 1 \wedge t_i \geq 0$
- $f$  es  $\alpha$ -**Hölder continua**  $\iff \exists c > 0 \mid \|f(x) - f(x')\| \leq c \|x - x'\|^\alpha$

- Si  $\alpha > 1$  entonces  $f$  es constante
- Si  $\alpha = 1$  entonces  $f$  es de Lipschitz

Sean  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  espacios métricos, sea  $f : X \rightarrow Y$

- $f$  es **de Lipschitz**  $\iff \exists K > 0$  tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X$$

- Toda aplicación de Lipschitz es uniformemente continua
- Si  $f$  es de Lipschitz entonces  $f$  es  $\alpha$ -Hölder continua.

$f \in C^1 \implies f \text{ de Lipschitz} \implies$ $\implies f \text{ uniformemente continua} \implies f \text{ continua}$
--

- $f$  es **contractiva**  $\iff f$  es de Lipschitz con  $K < 1$   $\wedge$  dominio y codominio coinciden, distancias incluidas ( $f : (X, d_X) \rightarrow (X, d_X)$ )

- Si  $f$  es contractiva y  $X$  es completo entonces  $f$  tiene un único punto fijo para el que  $f(x) = x$

- $f$  es **inyectiva**  $\iff \forall x, x' \in X, f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'$

- $f$  es **coerciva**  $\iff \exists \lambda > 0$  tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \geq \lambda d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X$$

- $f$  coerciva  $\implies f$  inyectiva
- Una matriz real  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es coerciva si existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, v^t A v \geq \lambda \|v\|_2^2$$

A estos  $\lambda$  se les llama constantes de coercividad.

- $A$  coerciva  $\implies A$  invertible

- $f$  es **abierto** si  $\forall U \subset X$  abierto, la imagen  $f(U)$  es un abierto de  $Y$

- $f$  es un **difeomorfismo**  $\iff f : U_1 \rightarrow U_2, U_1, U_2$  abiertos de  $\mathbb{R}^n$  es biyectiva,  $f \in C^s$  y  $f^{-1} \in C^s$

- $f : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  inyectiva,  $f \in C^s$  y todas las jacobianas de los puntos en  $U_1$  son invertibles  $\implies f$  es un difeomorfismo

- Decimos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es **regular** si todo punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es un valor regular.

- Un **valor regular** es un punto  $x_0$  tal que para un  $U_0$  entorno abierto de  $x_0$ , la función  $f : U_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es de clase  $C^1(U_0)$  y la diferencial  $(df)_{x_0}$  tiene rango máximo, que es  $\min(n, m)$

- Si  $n < m$  entonces  $f$  es una **inmersión**
- Si  $n = m$  entonces  $f$  es un **difeomorfismo local**
- Si  $n > m$  entonces  $f$  es una **submersión**
- Para ladrillitos: si  $Df$  es  $1 \times m$  o  $n \times 1$  entonces rango  $Df$  es máximo  $\iff$  rango  $Df = 1 \iff Df \neq 0$ .

- Una **inversa local** de  $f : U_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función  $(f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow U$  donde  $U \subseteq U_0$  es cualquier abierto tal que  $f(U)$  es abierto y  $f|_U$  es inyectiva.

### 3. Variedades

- Una **variedad** en  $\mathbb{R}^n$  de dimensión geométrica  $k \geq 0$  es un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $\forall x_0 \in X, \exists E, E' \subseteq \mathbb{R}^n$  abiertos con  $x_0 \in E$  y un  $\exists f : E \rightarrow E'$  difeomorfismo tal que

$$f(X \cap E) = E' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}) = \{y \in E' \mid y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_n = 0\}$$

- Si  $k = 1$  la variedad se llama curva en  $\mathbb{R}^n$
- Si  $k = 2$  la variedad se llama superficie en  $\mathbb{R}^n$
- Si  $k = n - 1$  la variedad se llama hipersuperficie en  $\mathbb{R}^n$
- La dimensión de una variedad es única, si hay dos puntos que tienen dimensión diferente entonces no es una variedad (puede ser unión de variedades).
- El difeomorfismo  $f$  se llama **difeomorfismo planchador**
- Una variedad se dice de clase  $C^{s \geq 1} \iff f \in C^{s \geq 1}$ .

- **Teorema del grafo:** Sean  $x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^n$ . Si  $\forall (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^{n+k}$  se puede expresar como  $(x, f(x))$  donde  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^{s \geq 1}$  entonces  $X$  es una  $C^s$ -variedad de dimensión  $k$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$ .

- **Teorema de la preimagen:** Sea  $f : U_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, n > m, f \in C^{s \geq 1}, b \in \mathbb{R}^m$ . Si  $f$  es submersión en  $a, \forall a \in f^{-1}(\{b\})$  entonces  $f^{-1}(\{b\})$  es o el vacío o una variedad de dimensión  $n - m$  y clase  $C^s$ .

- Si  $n = m$  entonces  $f^{-1}(\{b\})$  es una variedad de dimensión 0
- Para ladrillitos:  $f^{-1}(\{b\})$  es el vacío si  $b \notin \text{Im } f$ , caso completamente inútil por lo que nunca elegiremos  $f$  y  $b$  de tal manera

- Una **parametrización** de una variedad  $X$  en  $\mathbb{R}^n$  es un abierto  $W \subset \mathbb{R}^k$  y una función  $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  que cumple:

1.  $\Phi \in C^{s \geq 1}(W)$
2.  $\Phi(W) \subset X$
3.  $\exists Y \neq \emptyset$  abierto relativo de  $X$  tal que  $Y \subset \Phi(W)$

Además

- $\Phi$  no tiene por qué ser sobre pero  $\Phi(W)$  tiene que ser otra variedad (no puede ser insignificante)
- Una parametrización  $\Phi$  es de máxima calidad o un **sistema de coordenadas**  $\iff \Phi$  es inyectiva y regular. Esto equivale a comprobar
  1.  $\Phi(W) \subseteq M$
  2.  $D\Phi(x)$  tiene rango máximo  $\forall x \in W$
  3.  $\Phi$  es inyectiva en  $W$

### 4. Teoremas gordos

Sea  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable sobre el conjunto abierto y convexo  $S$ . Entonces  $\forall a, b \in S, \exists c \in [a, b] \mid f(a) - f(b) = \nabla f(c)(a - b)$

Sea  $f$  una función integrable sobre  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Definimos  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Si  $f$  es continua en  $c \in (a, b)$  entonces  $F$  es derivable en  $c$  y  $F'(c) = f(c)$ . Además, usando la regla de la cadena queda:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

Sea  $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach. Sean  $U_0 \in \mathbb{V}$  un abierto y  $f : U_0 \rightarrow \mathbb{V}$  una función de clase  $C^1$ . Si en  $x_0 \in U_0$  la diferencial  $L = (df)_{x_0}$  es invertible (e.d.  $L$  es lineal acotada, biyectiva y con inversa  $L^{-1}$  también acotada) entonces existen abiertos  $U, V$  con  $x_0 \in U, f(x_0) = y_0 \in V$  tales que  $f$  es biyectiva de  $U$  a  $V$ .

Además, en ese caso la inversa  $f^{-1} : V \rightarrow U$  es diferenciable en  $y_0$  y  $(df^{-1})_{y_0} = [(df)_{x_0}]^{-1}$ .

Sean  $x, a \in \mathbb{R}^n, y, b \in \mathbb{R}^m$ . Sea  $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función  $C^k, k \geq 1$ . Sea  $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+m}$  tal que  $F(a, b) = 0$ . Si

$$DF_y(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a, b) \end{pmatrix}$$

es invertible entonces  $\exists U \subset \mathbb{R}^n$  entorno abierto de  $a$  y  $\exists! g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $g(a) = b$  y  $F(x, g(x)) = 0, \forall x \in U$ . Es más,  $g \in C^k$  y

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = - [DF_y(x, g(x))]_{m \times m}^{-1} \left[ \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, g(x)) \right]_{m \times 1}$$

Esto es: las columnas de la jacobiana de  $g$ , que es una matriz  $m \times n$ , van dadas por la expresión anterior.

- Si de una ecuación queremos despejar  $y$ , mandamos todo a un lado y lo que no se puede anular es la matriz de las derivadas de  $y$ .
- En este enunciado se escribe lo que quieres despejar después, como el  $y \in \mathbb{R}^m$  pero a veces se pone antes. Da igual, lo que importa es la regla mnemotécnica de antes.